Hochverehrter Herr Doctor!

Sie würden mich zu grossem Danke verpflichten, wenn Sie mir Abdrücke Ihrer Arbeiten, speciell auch Ihrer Arbeiten über Relativitätstheorie überlassen wollten.

Zugleich möchte ich mir erlauben Sie zu fragen, ob Herr Varicak (Physik. Zeitschrift Nummer 5) sich vernünftigerweise auf Ihre Autorität berufen durfte als er auf pag 169 die Worte schrieb „Ich glaube, dass er beidemal dieselbe Entfernung finden wird, denn der Stab ist in Wirklichkeit nicht kürzer geworden." und weiter bis „..... mit Hilfe der optischen Signale"

Falls Sie diese meine Anfrage zu beantworten geneigt sind bitte ich noch gleichzeitig anzugeben ob ich

von Ihrer Antwort in einer eventuellen Publication Gebrauch machen darf und in welchem Umfang.

Wenn ich nicht irre hatte ich in Göttingen das Vergnügen mit Ihnen zu sprechen (Hilbert-Seminar).

Im voraus in bestens für die eventuelle Erfüllung meiner Bitte dankend verbleibe ich

Ihr sehr ergebener

Paul Ehrenfest

22. II. 1911.

Petersburg. Lopuchinskaja 7A.

(Петербургъ - Лопухинская 7А. -
D= П. Эренфестъ)

DSI

19. IX. 1918 Leiden

Sehr geehrtes Fräulein!

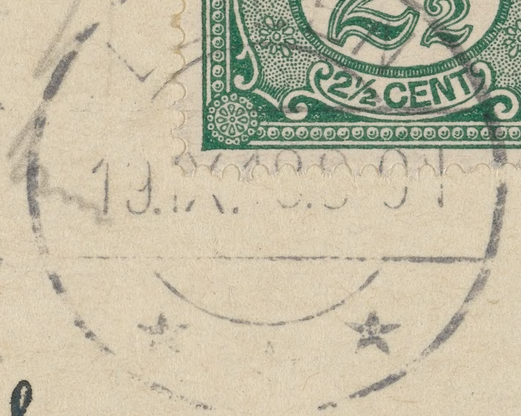
Heute erhielt ich Ihren Brief vom 12. IX. - Ich halte für beinahe ausgeschlossen, dass der Verlag gegenwärtig die Zustimmung zur Übersetzung geben würde, selbst wenn der Autor dazu bereit wäre.

Doch bitte ich Sie jedenfalls, mir einige Angaben über Ihren Studiengang und Ihre Publicationen zu senden für die sich der Autor sicher interessieren wird, ehe er sich entschliessen kann einem bestimmten Fachgenossen die Übersetzung seines Buches anzuvertrauen.

Hochachtungsvoll

P. Ehrenfest

BRIEFKAART



Prof. P. Ehrenfest
Charlottenburg
Mrs.

Farm.

27/9

G. Rabel

Berlin

Afzender: P. Ehrenfest

adres Leiden

Universiteit

W. Berlin
Charitéstr. 9

Charitestr. 9

DSI

Z. f. Phys. (22+1 Blatt Ms.) ₺ 285.
Kommt an Herrn Prof. Dr. P. Ehrenfest, Leiden (Holland)

2. Sep. 1925

...gen im
...ystallgitter
... quantisierter
...ungungen.

...n Leiden.
(August 1925)
...nd warum
...ukungen
..., die Einstein
...hen mit (IV).

Ersuche:

2. Sep. 1925

1° Die Symbole

Für Hände vermerkt!

[ ] { } II IV

~~dort wo ich~~ an allen jenen Stellen an denen ich sie roth markiert habe durch fetten Druck hervor zu heben.

2° In den "rechnerischen Nachträgen" §8 - §14 die Formeln und den Text so dicht ineinander zu schieben als mit der Deutlichkeit der (nur irgend) Formeln verträglich ist.

DSI

Z. f. Phys. (22+1 Blatt Ms.) # 285.
Korrektur an Herrn Prof. Dr. P. Ehrenfest, Leiden (Holland)

2. Sep. 1925

Energieschwankungen im Strahlungsfeld oder Kristallgitter bei Superposition ~~von~~ quantisierter Eigenschwingungen.

Von P. Ehrenfest in Leiden.

(Eingegangen am 29. August 1925)

Kleinpreis

Es wird gezeigt, dass und warum sich ~~so~~ kleinere Schwankungen ergeben, als diejenigen, die Einstein fordert: gl(II) und(III) verglichen mit(IV).

§1. In einer Diskussion über die Einstein'schen Lichtschwankungen machte vor etwa einem Jahr Frau T. Ehrenfest-Afanassjewa eine Bemerkung, die sich folgendermassen formulieren lässt:

Einstein hat seine Formel für die Energieschwankungen eines Volumenelementes im schwarzen Strahlungsfeld aus der Planck'schen Strahlungsformel abgeleitet und erhält das Resultat: die Grösse dieser Schwankungen ist unverträglich mit der Auffassung des Strahlungsfeldes als einer Superposition von Lichtwellen.*)

anderseits lässt sich aber bekanntlich

*) A. Einstein. Physikz. Z.S. 10, 185, 817, 1909; Solvay-Congress 1911 Rapp. p. 419. – Ausser den weiterhin in Fussnoten genannten Arbeiten sei auf folgende Arbeiten über die Lichtschwankungen hingewiesen: M. v. Laue Verh. d. D. Phys. Ges. 17, 198 (1915). H.A. Lorentz Théories statist. Teubner 1916 Note IX. – W. Bothe Räuml. Energieverteilung in Hohlraumstrahlung Z.f. Ph. 20, 145, 1923. M. Planck Ann. d. Ph. 73, 272, 1924.

der Annahme Gebrauch, dass die En-

*) Ornstein u. Zernike. Energieschwankungen der zwarte straling en licht-atomen Akad. v. Wetensch. Amsterdam. 28, 280 (1919/20). –

die Planck'sche Strahlungsformel für die Hohlraumstrahlung aus Wellenvorstellungen ableiten, wenn man nur die Rayleigh-Jeans'schen Eigenschwingungen des Hohlraums quantisiert und einer Planck'schen Energiestufen-Statistik unterwirft.

Es ergibt sich so – noch ganz abgesehen von der Frage nach der "wirklichen" Natur des Strahlungsfeldes – der folgende innere Widerspruch: Von Wellenvorstellungen ausgehend gelangt man via Planck-Formel zu Lichtschwankungen die mit der Wellenvorstellung unvereinbar sind. – Wie löst sich dieser innere Widerspruch?

Die Antwort auf diese Frage ist im Wesentlichen in der folgenden Bemerkung enthalten, welche die Herren L.S. Ornstein und F. Zernike schon im Jahre 1919 entwickelt und begründet haben*: Einstein macht bei seiner Schwankungsrechnung von der Annahme Gebrauch, dass die En-

*) Ornstein u. Zernike. Energieschwankungen der zwarte straling en licht-atomen Akad. v. Wetensch. Amsterdam. 28, 280 (1919/20). –
Die Gastavea

tropieen der verschiedenen Volumelemente
rein additiv also die Schwankungen
in ihnen von einander im Sinne der
Wahrscheinlichkeitsrechnung von
einander unabhängig sind. Diese Annahme
sei aber unerlaubt, falls das Strahlungs-
feld aus einer Superposition von Eigen-
schwingungen des Hohlraumes besteht.*)

§2. Obzwar so die Wurzel des oben erwähnten
Widerspruches völlig klargelegt ist und obzwar
man gegenwärtig wohl schon entschlossen sein
muss, die Darstellung der Hohlraumstr. durch
quantisierte Eigenschwingungen zu verlassen,
so möchte ich mir doch erlauben zwei Schwank
ungsformeln vorzulegen zu denen die
consequente Festhaltung dieser Hypothese
führt. - Einigermassen zur Rechtfertigung
folgende Bemerkungen:

1°. Auch in den Volumelementen eines
Krystallgitters z.B. eines gesättigten Diamanten
müssen Energieschwankungen auftreten,
und nach dem Erfolge der Einstein'schen
Theorie der spezifischen Wärme fester
Körper wird man überzeugt sein können,

*) Ornstein u. Zernike weisen bei dieser Gelegenheit auf die enge Beziehung hin die hier zu Falles Untersuchungen über die Nichtadditivität der Entropie bei Cohärenz besteht M. v. Laue. Ann. d. Phys 20, 365 (1906), 23, 1, 795 (1907).

dass sie – abgesehen von Unterschied: Lichtgeschwindigkeit ≫ Geschwindigkeit elastischen Wellen – ganz analogen Gesetzen gehorchen müssen*), wie die Einsteinschen Lichtschwankungen. Für die Energieschwankungen im Krystallgitter aber ist man vorläufig xx) doch wohl noch ganz auf die Methode der Eigenschwingungen angewiesen.

---

*) Einstein. Solvay Congress 1911. Rapports, p. 419.– Die translatorische Bewegung der Molekülle von verdünntem He scheint auch noch bei den Temperaturen des flüssigen Heliums im Wesentlichen den kT-Wert zu besitzen – also prinzipiell auch bei thermischem Contact mit z.B. einem Diamanten, dessen Wärmebewegung hier schon völlig degeneriert ist. Ohne hohe Schwankungsconcentrationen der Energie im Diamant-gitter wäre ein derartiges thermisches Gleichgewicht doch wohl ganz undenkbar

xx) Es sei denn, dass die Bose-Einstein-Statistik bei Anwendung auf die Atome eines Krystalles einen neuen Weg eröffnet. – Siehe A. Einstein Quantentheorie einatomiger idealer Gase. Berliner Akademie 10. VII 1924, S.

2° auch wenn man, Einstein folgend dazu übergeht die Lichtschwankungen mit Hülfe von Lichtcorpusceln zu deuten, so gelingt das zwar vorzüglich mit dem einen Term der - aus dem Planckschen Strahlungsgesetz abgeleiteten - Schwankungsformel: mit dem "W. Wienschen" Term; der andere Term aber - der "Rayleigh-Jeans'sche" - weist bekanntlich auf eine eigenartige Verbundenheit der Licht-Corpuscelu hin und zwar - wenn man die Interferenzerscheinungen nicht ganz ignorieren will - auf eine wellenartige Verbundenheit der Licht-Corpuscelu*). Das aber macht wahrscheinlich, dass auch in der zukünftigen Theorie der Lichtschwankungen einige Züge der Wellen-Superposition doch wohl erhalten bleiben dürften.

*) Der Text der Arbeit von S.N. Bose Planckes Gesetz und Lichtqu. Hypothese Z.f.Ph. 26, 178, 1924 erweckt leicht den Eindruck, als ob sich das Planck'sche Strahlungsgesetz aus der Vorstellung unabhängiger Lichtcorpusceln ableiten liesse. Aber das ist nicht der Fall. Unabhängige Licht-Corpuscelu würden dem Strahlungsgesetz von W. Wien entsprechen. Siehe A. Einstein Ann. d. Phys. 17, 1327, 1905; P. Ehrenfest Ann. d. Phy. 36, 91, 1911; C. Kruthow Phys. Zeits. 15, 133, 363, 1914. P. Ehrenfest u. H. Kamerlingh Onnes Ann. d. Ph. 46, 1023, 1915. - Dementsprechend haben M. Wolfke Phys. Z.S. 22, 375, 1921. und W. Bothe Z.f.P. 20, 145, 1923, die Hypothese der Complex-Bildung (räumlich benachbarter) Licht-Corpuscelu benutzt um das Planck'sche Gesetz zu erhalten. Diese würde aber noch nicht den Interferenz-Erscheinungen Rechnung tragen,

3° Die Vergleichung der im § 4 abgeleiteten Schwankungsformel (II) mit der durch Einstein abgeleiteten §6 (IV) beleuchtet mehr im Detail den Widerspruch zwischen den folgenden beiden Annahmen:

a.) Die Schwankungen entstehen aus der Superposition quantisierter ~~Hohlraum-Strahlung~~ Hohlraumschwingungen [Basis von **II**]

b.) Die Entropien und Schwankungen verschiedener Theile des Strahlungsfeldes sind voneinander unabhängig [Basis von **IV**]

4° Überdies zeigt die Gegenüberstellung von "Problem II" (§4) und "Problem III" (§5), dass man ~~bei der Frage~~ für die nach den Schwankungen in einem Volumenelement ganz verschiedene Werte erhält, wenn man nach den zeitlichen (Schwebungs-) Schwankungen oder aber nach den von der wechselnden Anregung der ~~Eigen-~~ Hohlraum-Eigenschwingungen bewirkten Schwankungen fragt. Dieser wesentliche Unterschied wird in der Literatur gewöhnlich nicht beachtet

§3. "Problem I".

Es sei gegeben ein durch eine Spiegelhülle abgegrenztes "Hohlraum" vom Volumen $\bar{V}$. Im Frequenzgebiet $\nu, \nu+d\nu$ besitzt er

$$(1) \qquad Z = \bar{V} \cdot \frac{8\pi\nu^2 d\nu}{c^3}$$

Eigenschwingungen. Sie seien quantisiert, das heißt der Energieinhalt der einzelnen Eigenschwingung kann nur die Werte $0, h\nu, 2h\nu, \ldots$ annehmen. Sie mögen jeden Tag einmal um 0-Uhr einer "Planck-Lotterie" unterworfen werden indem sie für kurze Zeit an einen ∞ großen Körper von der Temperatur T angeschlossen werden. Ihre Phasen spielen dann unabhängig voneinander und das Lotteriemittel $[\varepsilon]$ des Energieinhaltes ε jeder einzelnen dieser Z Eigenschw. genommen über viele Tage ist:

$$(2) \qquad [\varepsilon] = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

also das Lotteriemittel ihres gesamten Energieinhaltes E das E_0 heißen möge

$$(3) \qquad E_0 \equiv [E] = Z\,[\varepsilon]$$

Ferner erhält man*) für das Lotterie-mittel der quadratischen Schwankung von E:

$$\frac{\left[(E-E_0)^2\right]}{E_0^2} = \frac{1}{Z} + \frac{1}{Q} \qquad (I)$$

wo (4) $Q = \frac{E_0}{\sum h\nu}$ [anzahl der in E_0 enthaltenen / Energiebeträge $h\nu$]

§4. Problem II." Fasse ein beliebiges Teilgebiet xx) v des Hohlraums V ins Auge und zwar nur gedanklich innerhalb V markiert nicht etwa z.B. durch Scheidewand abgegrenzt. – Sein in's Frequenzgebiet $\nu, \nu+d\nu$ fallende Energieinhalt zur Uhrzeit $\varepsilon(t)$. Er schwankt – im Gegensatz zu ε und E – noch innerhalb eines und desselben Tages dank der Interferenzschwebungen der Z Eigenschwingungen von V um einen für diesen Tag eigenthümlichen Mittelwert $\{\varepsilon(t)\} = \eta$ auf den wir in §5

*) Siehe §4 gl II falls dort $v = V$ also $z = Z$, $q = Q$ genommen wird. (speziell)

xx) Aus einem oder mehreren Stücken bestehend. Aber jedes Stück sehr groß verglichen mit den zum Frequenzgebiet $\nu, \nu+d\nu$ gehörigen Wellenlängen. Siehe §8.

~~auf dessen in § 5~~ zurückzukommen werden.
Vorläufig betrachten wir das Lotteriemittel $[e(t)]$ über sehr viele Tage. Sein von der Stunde t unabhängiger Wert e_0 ist gegeben durch *)

$$(5)\qquad [e(t)] = e_0 = v\,\frac{[E]}{V} = z\,[\varepsilon]$$

wo

$$(6)^{xx})\qquad z = \frac{v}{V}\,Z = v\cdot\frac{8\pi\nu^2 d\nu}{c^3}$$

Für das Lotteriemittel der quadrat. Schwankung von e(t) um e_0 ergibt sich - wieder unabhängig von der Stunde t der Wert: ***)

$$\frac{\left[\left(e(t)-e_0\right)^2\right]}{e_0^2} = \frac{1}{z} + \frac{1}{Q} \qquad (II)$$

§5. "Problem III" Wir betrachten nun die zeitliche Schwankung, die e(t) im Laufe eines Tages, d.h. also während der Hohlraum isoliert bleibt, um das Tagesmittel

$$\{e(t)\} = \eta \qquad (7)$$

ausführt. Die mittlere quadratische Schwankung innerhalb eines solchen Tages:

*) ~~Beweis~~ Siehe §10 (38)(39)

**) Wäre v durch Spiegelwände abgegrenzt so würde z 1 ein die Anzahl seiner Eigenschwingungen die im Frequenzbereich $\nu, \nu+d\nu$ fallen.

***) Siehe Beweis §12 (52)

(8) $\{(\varepsilon(t)-\eta)^2\}$

besitzt für verschiedene Tage noch ganz verschiedene nach Zufall wechselnde Werte. Wir fragen also nach der „mathemat. Erwartung" der Größe (8) d.h. nach ihrem Lotterie-Mittelwert über viele Tage. Für sein Verhältniß zu ε_0^2 erhalten wir*):

$$\frac{[\{(\varepsilon(t)-\eta)^2\}]}{\varepsilon_0^2} = \frac{1}{z} - \frac{1}{Z} \qquad (\text{III}.)$$

§6. Der Gegensatz der Schwankungsformel II zu der Einstein'schen. – Einstein erhält für die quadratische Schwankung des Energieinhaltes von v den Ausdruck:**)

$$\frac{\overline{(\varepsilon-\varepsilon_0)^2}}{\varepsilon_0^2} = \frac{1}{z} + \frac{1}{q} \qquad (\text{IV})$$

wo

$$(9) \qquad q = \frac{\varepsilon_0}{h\nu}$$

[anzahl der in ε_0 enthaltenen Energiebeträge $h\nu$]

*) Beweis siehe §11 (45). – Es ist bemerkenswerth, dass die Schwankung III ihren Werth beibehält falls man die Eigenschwingungen des Hohlraums einer fast beliebigen Lotterie unterwirft, statt der Planck'schen – [siehe Bemerk. am Schluss von §11] – z.B. wäre der Werth auch für klassische Statistik ($h=0$) genau derselbe.

**) Auch wir würden natürlich diesen Werth statt (II) erhalten, wenn v nicht blos gedanklich sondern physisch durch Wände abgegrenzt würde und man seine Eigenschwingungen direct – durch Contact mit schwarzem Körper – einer Planck-Lotterie unterwürfe. [Vergl. "Problem I" für das volle V]

Im Falle $v \ll V$ also $q \ll Q$ verlangt die Einsteinsche Formel (IV) viel stärkere Schwankungen als (II).

Läßt man V also auch Z und Q in's Unendliche wachsen so bleibt (IV) davon unberührt, die rechten Seiten von (II) und (III) dagegen convergieren gegen

$$(10) \qquad \frac{1}{z}$$

d.h. den Wert, der auch direct aus der Interferenz nichtquantisierter Wellen folgt*)

Nur wenn v mit V zusammenfällt, also $z = Z$, und $q = Q$ wird fallen (IV) und (II) miteinander (und mit (I)) zusammen. In diesem Fall liefert (III) den Wert Null, wie es natürlich sein muss.

§7. Abhängigkeit oder Unabhängigkeit der Schwankungen in verschiedenen Volumelementen des Strahlungsfeldes (und Krystallgitters)? - Vergrößert man bei festgehaltenem V das Teilgebiet v auf das

*) H.A. Lorentz Théories statistiques Note IX.

n-fache, so multiplicierten sich ~~natürlich~~ z, e_0 und q ebenfalls mit n während natürlich Z, E_0 und Q unverändert bleiben. Aus (IV) sieht man, dass dabei auch $\overline{(e-e_0)^2}$ gerade n-mal grösser wird, was damit zusammenhängt, dass Einstein bei der Ableitung von (IV) die Entropie und also auch die Schwankungen der verschiedenen Volumelemente als unabhängig behandelt. - Die analogen quadratischen Schwankungen in (II) und (III) wachsen hingegen durchaus nicht proportional mit n, was deutlich zeigt, dass bei Superposition von Hohlraumschwingungen die Energieschwankungen in den einzelnen Theilen von v von einander abhängig sind. Dabei sei noch ausdrücklich daran erinnert, dass das Theilgebiet v aus räumlich getrennten Stücken bestehen kann darf.

Welche von den beiden Hypothesen passt nun besser zur Wirklichkeit - die von der Unabhängigkeit der Entropieen oder die von dem Aufbau durch Superposition von Eigenschwingungen? - Es scheint dass die zweite kaum noch gegenüber der ersten zu halten ist. Wenn man sie aber für das Strahlungsfeld aufgibt, wird man sie wohl auch für die Energievertheilung in einem Krystallgitter fallen lassen müssen!

Rechnerische Nachträge.

§8. Ohne Verlust irgend eines wesentlichen Zuges unseres Problems (in unserem Problem) können wir (statt der elektromagnetischen Hohlraum-Schwingungen zur Vereinfachung Saitenschwingungen betrachten.

(1) $\rho \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \chi \frac{\partial^2 s}{\partial x^2}$ (2) $s(0,t) = s(L,t) = 0$

(3) $s(t,x) = \sum_h C_h \sin(h\omega t + \tau_h) \sin hyx$

(4) $\omega = \pi \frac{c}{L}$ (5) $y = \frac{\pi}{L}$ (6) $\frac{\rho\omega^2}{2} = \frac{\chi}{2} y^2$

Die Energie des (eventuell aus mehreren Stücken bestehenden Teilgebietes*) l):

(7) $u(t) = \int_{(l)} dx \left\{ \frac{\rho}{2} \left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^2 + \frac{\chi}{2} \left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2 \right\}$

χ bedeutet griechisch Klein-Kappa

Nach Einsetzen von (3) in (7) erhält man für denjenigen Theil von $u(t)$, der in's Frequenzgebiet $\nu, \nu+d\nu$ fällt:

$$(8)\quad e(t) = \sum_h \sum_k B_h B_k \left[\cos(h\omega t + \tau_h)\cos(k\omega t + \tau_k)\, \Phi_{hk} + \sin(h\omega t + \tau_h)\sin(k\omega t + \tau_k)\, \Psi_{hk} \right]$$

wo

$$(9)\quad \begin{cases} \nu \leqq h\omega \leqq \nu + d\nu \\ \nu \leqq k\omega \leqq \nu + d\nu \end{cases} \qquad h, k \gg 1 \quad (10) \qquad \frac{h-k}{h+k} \ll 1 \quad (11)$$

$$(12)\quad B_h = \sqrt{\frac{s\omega^2}{2}}\, h C_h = \sqrt{\frac{\kappa\gamma^2}{2}}\, h C_h$$

$$(13)\quad \Phi_{hk} = \int_{(\ell)} dx \sin hyx \sin kyx = \frac{1}{2}\int_{(\ell)} dx \cos(h-k)yx - \frac{1}{2}\int_{(\ell)} dx \cos(h+k)yx$$

$$(14)\quad \Psi_{hk} = \int_{(\ell)} dx \cos hyx \cos kyx = \frac{1}{2}\int_{(\ell)} dx \cos(h-k)yx + \frac{1}{2}\int_{(\ell)} dx \cos(h+k)yx$$

Falls nur (die Stücke aus denen ℓ besteht) $^{(\ell)}$ gross sind gegenüber den zum Frequenzgebiet (9) gehörigen Wellenlängen so erkennt man bei Berücksichtigung von (10), (11) leicht dass in (13) und (14) das zweite Integral völlig vernachlässigbar ist gegenüber

dem ersten Integral:

$$(15)\qquad \frac{1}{2}\int_{(e)} dx\, \cos(h-k)\gamma x \;=\; \Omega_{hK}$$

also ist

$$(16)\qquad e(t)=\sum\sum B_h B_k \cos\left\{(h-k)\omega t+\tau_h-\tau_k\right\}\cdot\Omega_{hK}$$

§9. Die B_h und τ_h mögen nun <u>irgend einer</u> Lotterie*) unterworfen werden von der zunächst nur bekannt sei, dass alle B_h und alle τ_h unabhängig voneinander spielen, so dass für die Lotteriemittel $[\;]$ gilt:

$$(17)\qquad [\cos(\tau_h-\tau_k)]=[\sin(\tau_h-\tau_k)]=0$$

$$(18)\qquad [B_h B_k]=[B_h][B_k]$$

} für $h\neq k$

Ferner sei:

$$(19)\qquad [B_h^2]=[B_k^2]=[B_e^2]=\ldots=\mathrm{II}$$

$$(20)\qquad [B_h^4]=[B_k^4]=[B_e^4]=\ldots=\mathrm{IV}$$

} für alle $h, k, e \ldots$ die zum Frequenzbereich (9) gehören

*) Beschränkung auf die Planck'sche Lotterie nur erst im §12. – Beachte Bemerkung am Ende von §11.

Dann gilt *):

(21) $$\left[e(t)\right] = \sum_h \left[B_h^2\right] \Omega_{hh} + \sum_h \sum_k{}' \left[B_h\right]\left[B_k\right]\left[\cos\left((h-k)\omega t + \tau_h - \tau_K\right)\right]$$

also wegen (17) (18): ~~unabhängig von t~~

(22) $$c_0 \equiv \left[e(t)\right] = \text{II} \sum_h \Omega_{hh} \qquad \text{(unabhängig von t)}$$

Ferner ist:

(23) $$\left[(e(t))^2\right] = \sum_h \sum_k \sum_e \sum_m \left[B_h B_k B_e B_m\right]\left[\varphi(h,k)\,\varphi(\ell,m)\right] \Omega_{hK}\,\Omega_{em}$$

(24) wo $$\left[\varphi(h,k).\varphi(\ell,m)\right] = \left[\cos\left((h-k)\omega t + \tau_h - \tau_K\right).\cos\left((\ell-m)\omega t + \tau_e - \tau_m\right)\right]$$

bei festem t ist hier das Spiel von $(\tau_h - \tau_K)$ und $(\tau_e - \tau_m)$ entscheidend und wegen (17) sind alle größen (24) Null ausser die folgenden:

(25) $$\left[\varphi(h,k)\,\varphi(h,k)\right] = \frac{1}{2}$$

(26) $$\left[\varphi(h,k)\,\varphi(k,h)\right] = \frac{1}{2}$$

(27) $$\left[\varphi(h,h)\,\varphi(\ell,\ell)\right] = 1$$

(28) $$\left[\varphi(h,h)\,\varphi(h,h)\right] = 1$$

*) $\sum_h \sum_K{}'$ bedeutet Ausschließung des gliedes $k=h$ die separat genommen wurden, weil sie besondere statistische Eigenschaften haben.

Somit ist

(29) $\left[(e(t))^2\right] = \sum_k \sum_{k}' \left[B_k^2\right]\left[B_k^2\right] \cdot \frac{1}{2} \Omega_{kk}^2$ (siehe 25)

$+ \sum_k \sum_{k}' \left[B_k^2\right]\left[B_k^2\right] \frac{1}{2} \Omega_{kK}^2$ (siehe 26)

$+ \sum_k \sum_{e}' \left[B_k^2\right]\left[B_e^2\right] \cdot 1 \cdot \Omega_{kk}\Omega_{ee}$ (siehe 27)

$+ \sum_k \left[B_k^4\right] \cdot 1 \cdot \Omega_{kk}^2$ (siehe 28)

oder wegen (19)(20)

(30) $\left[(e(t))^2\right] = \mathrm{II}^2 \sum_k \sum_{k}' \Omega_{kK}^2 + \mathrm{II}^2 \sum_k \sum_{e}' \Omega_{kk}\Omega_{ee} + \mathrm{IV} \sum_k \Omega_{kk}^2$

Für die <u>Zeitmittel</u> $\{\ \}$ erhält man:

(31) $\eta \equiv \{e(t)\} = \sum_k \sum_{k} B_k B_k \Omega_{kk} \{\varphi(k,k)\} = \sum_k B_k^2 \Omega_{kk}$

(32) $\left[\{e(t)\}^2\right] = \sum_k \sum_{k} \left[B_k^2 B_k^2\right] \Omega_{kk}\Omega_{kk} = \mathrm{II}^2 \sum_k \sum_{k}' \Omega_{kk}\Omega_{kk} + \mathrm{IV} \sum_k \Omega_{kk}^2$

§ 10. Nun ist aber nach (15):

(35) $\sum_k \Omega_{kk}^2 = \frac{l^2}{4} Z$

(33) $\Omega_{kk} = \Omega_{kKk} = \frac{l}{2}$ also (34) $\sum_k \Omega_{kk} = Z \frac{l}{2}$

(36) $\sum_k \sum_{k}' \Omega_{kk}\Omega_{kKk} = \frac{l^2}{4} Z(Z-1)$

wo Z die Anzahl der Eigenschwingungen sind die ins Frequenzgebiet (9) fallen.

Ferner ist*):

(37) $$\sum_h \sum_k{}' \Omega_{hK}^2 = \frac{l^2}{4} Z^2 \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{Z}\right)$$

wo (38)xx) $$z = \frac{l}{L} Z$$

also:

(39) $$e_0 \equiv [e(t)] = \frac{l}{2} \mathrm{II}\, Z$$

(40)***) $$[e^2] = \frac{l^2}{4} \mathrm{II}^2 \left(Z^2\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{Z}\right) + Z^2\left(1 - \frac{1}{Z}\right)\right) + \frac{l^2}{4} \mathrm{IV}\, Z$$

(41) $$[\eta^2] \equiv [\{e(t)\}^2] = \frac{l^2}{4} \mathrm{II}^2 Z^2 \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{Z}\right) + \frac{l^2}{4} \mathrm{IV}\, Z$$

§11. Zur Ableitung der ~~quadratischen~~ quadratischen Schwankungsmittel aus diesen Formeln beachte man, dass:

(42) $$[(e - e_0)^2] = [e^2] - e_0^2$$

(43) $$\{(e(t) - \eta)^2\} = \{e^2\} - \eta^2$$

(44) $$[\{(e(t) - \eta)^2\}] = [\{e^2\}] - [\eta^2] = \{[e^2]\} - [\eta^2] = [e^2] - [\eta^2]$$

$\equiv e_0^2 - [\eta^2]$

*) Beweis in §14

xx) Vergl. das z in gl(6) § 4

xxx) Von hier ab der Kürze halber e statt e(t) geschrieben.

Dann findet man durch Einsetzen von (39,40,41) in (42,44):

$$(45)\qquad \frac{[\{(e-\eta)^2\}]}{e_0^2} = \frac{1}{z} - \frac{1}{Z}$$

$$(46)\qquad \frac{[(e-e_0)^2]}{e_0^2} = \left(\frac{1}{z} - \frac{2}{Z}\right) + \frac{IV}{II^2}\,\frac{1}{Z}$$

Man sieht: Die dem "Problem III" (§5) entsprechende Schwankung (45) hat für alle Lotterieen die nur den Bedingungen (17-20) des §9 genügen denselben Betrag. – Die dem "Problem II" (§4) entsprechende Schwankung hängt noch von dem Wert ab, den die Lotterie für IV/II^2 liefert.

§12. Beachtet man nun (19,20) in §9 und bedenkt, dass

$$(47)\qquad \frac{IV}{II^2} = \frac{[B^4]}{[B^2]^2} = \frac{[\varepsilon^2]}{[\varepsilon]^2}$$

ist, wo ε den Energieinhalt einer im Frequenzgebiet (g) §8 gelegenen Eigenschwingung bedeutet*).

*) Vergl. das ε des §3

denn ε_n und ε_n^2 sind ja proportional zu B_n^2 und B_n^4. Für eine Planck-Lotterie aber ist (siehe folgenden §):

$$(48)\qquad \frac{[\varepsilon^2]}{[\varepsilon]^2} = e^{\frac{h\nu}{kT}} + 1$$

also nach (46)(47):

$$(49)\qquad \frac{[(e-e_0)^2]}{e_0^2} = \frac{1}{Z} + \frac{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}{Z}$$

Für den Energieinhalt E der ganzen Saite soweit ins Frequenzgebiet (g) §2 fällt gilt aber

$$(50)\qquad [E] = Z\,[\varepsilon] = Z\,\frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

also für die Anzahl der in ihm enthaltenen Energiebeträge $h\nu$:

$$(51)^{*)}\qquad Q \equiv \frac{[E]}{h\nu} = \frac{Z}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

Also nach (49)

$$(52)\qquad \frac{[(e-e_0)^2]}{e_0^2} = \frac{1}{Z} + \frac{1}{Q}$$

*) Vergl. das Q des §3.

§13. Ableitung der gl (48). – ε_0 ist für eine Planck-Lotterie:

(53) $[\varepsilon] = h\nu \frac{Q}{P}$ (54) $[\varepsilon^2] = (h\nu)^2 \frac{R}{P}$

wo unter Benützung der Abkürzung $h\nu/kT = \omega$

(55) $P = \sum_0^\infty e^{-s\omega} = \frac{1}{1-e^{-\omega}}$ (56) $Q = \sum_0^\infty s e^{-s\omega} = -\frac{dP}{d\omega}$ (57) $R = \sum_0^\infty s^2 e^{-s\omega} = \frac{d^2P}{d\omega^2}$

was nach kurzer Zwischenrechnung liefert:

(58) $$\frac{[\varepsilon^2]}{[\varepsilon]^2} = e^\omega + 1 = e^{\frac{h\nu}{kT}} + 1$$

§14. Ableitung der gl (37). – Es war nach gl(15) §8:

(59) $\Omega_{hK} = \frac{1}{2} \int_{(\ell)} dx \cos(h-k)\gamma x$

Falls man zwecks Approximation von den Ungleichungen (10, 11) §8 Gebrauch macht sieht man*), dass

(60) $\sum_h \sum_k{}' \Omega_{hK}^2 \cong \sum_h \sum_{-\infty}^{+\infty}{}' \Omega_{h,h+s}^2 = \sum_h 2 \sum_1^\infty \left(\frac{1}{2} \int_{(\ell)} dx \cos s\gamma x\right)^2 = \frac{N}{2} \sum_1^\infty A_s^2$

*) $\sum'$ bedeutet dass $s=0$ weggelassen werden soll. Zur Rechtfertigung der Approximation hat man noch zu beachten, dass $\Omega_{h,h+s}^2$ mit wachsendem s stark abnimmt.

wo (61) $$A_s = \int_{(\ell)} dx \cos syx$$

Zur Auswertung der mendlichen Summe in (60) folgender Kunstgriff: Betrachte eine Function $f(x)$ die im Theilgebiet (ℓ) gleich 1 sonst im Intervall $0 \leqq x \leqq L$ gleich 0 ist. Bei Fourier-Entwicklung dieser $f(x)$ hat man:

(62) $$f(x) = \sum_0^\infty a_s \cos syx$$

(63) $$\int_0^L dx \,(f(x))^2 = L a_0^2 + \frac{L}{2} \sum_1^\infty a_s^2$$

und es ist

(64) $$\int_0^L dx \,(f(x))^2 = \int_{(\ell)} dx . 1 = \ell$$

(65) $$a_0 = \frac{1}{L} \int_0^L dx \, f(x) . \cos 0yx = \frac{\ell}{L}$$

(66) $$a_s = \frac{2}{L} \int_0^L dx \, f(x) \cos syx = \frac{2}{L} \int_{(\ell)} dx \cos syx = \frac{2}{L} A_s$$

Einsetzen von (64)(65)(66) in (63) liefert

(67) $$\sum_1^\infty A_s^2 = \frac{\ell^2}{2} \left(\frac{L}{\ell} - 1 \right)$$

~~und hieraus unter Benützung (38)~~
und dadurch geht (60) bei Benützung noch von (38) über in:

(68) $$\sum_h \sum_k{}' \Omega_{hk} \cong \frac{\ell^2}{4} \Sigma^2 \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{Z} \right)$$

Leiden, August 1925.

DSI

AUTOGRAPHE

de

Ehrenfest

Paul

OBSERVATIONS

1/ Ms.a.s. 22 p. 4° Leiden, Anfang 1925.

Eigenhändig geschriebene wissenschaftliche Abhandlung über die Statistik u. Energieschwankungen eines Strahlungsfeld oder Korpuskelgases bei Superposition quantenstatistisch unabhängiger Störungen.

Es wird gezeigt, dass neue quantitative Schwankungsangaben, als diejenigen, die Einstein fand.

geb. 18. I. 1880 in Wien, Studium daselbst, in Göttingen 1900 - 1904, Dr. phil. Wien 1904, seit 1912 Professor für theoretische Physik a/d. Universität Leiden, Holland, gest. nachfolger von H. A. Lorentz.

2) Cp.a.s. Leyden, 19.9.1918, an Frl. Rabel, wegen Uebersetzung des Werkes eines ungenannten Autors, der Verlag aber dürfte kaum die Einwilligung zur Uebersetzung geben.

ISD

269. Paul **EHRENFEST** (1880-1933) le grand physicien (mesura les variations du poids de la terre etc.) : **L.A.S.** de S. Petersbourg, **1911,** en allemand, au physicien J. LAUB, le remerciant pour **ses travaux sur la THEORIE DE LA RELATIVITE,** 2 pp. in-8, trous de classeur **(Laub fut le correspondant et le collaborateur d'EINSTEIN)** — précieux, vu l'époque ! Morssen - 69 **150 »**

276. FLORENT SCHMITT (1870-1958) le comp. de mus. : **manuscrit aut. sig.** (musiques et paroles) — **mélodie** pour piano et chant, titre et 7 pp. gr. in-fol, sur un poème célèbre des « **Romances sans paroles** » **de Verlaine,** qui commence : « O triste, triste était mon âme, à cause, à cause d'une femme...» mélodie longtemps mûrie, car à la fin il a mis : « Paris, janvier 92 — Saint-Cloud, décembre 93 — Arcachon, Avril 97 » **590 »**